

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Taller Repaso Derivación Explicita, implícita y Métodos de Integración

I DERIVACION EXPLICITA: Es posible derivar explícitamente cuando la igualdad separa la variable x de la variable y. De acuerdo al caso existen distintas técnicas de derivación: para la suma/resta, para el producto, para el cociente, para las funciones compuestas y para las funciones especiales como las trigonométricas, inversas, exponenciales y logarítmicas. Te recomendó hacer una ficha bibliográfica que resuma esta información.

Observa estos ejemplos que usan la regla del cociente ejemplos:

$$f(x)=\frac{1}{3x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-6x}{(3x^2)^2}=\frac{-6x}{9x^4}=-\frac{2}{3x^3}$$

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

Ahora observa estos ejemplos que combinan varias técnicas

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$$

$$f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x+1)-\sqrt{x-1}}{(x+1)^2}=\frac{x+1-2(x-1)}{2(x+1)^2\sqrt{x-1}}=\frac{-x+3}{2(x+1)^2\sqrt{x-1}}$$

II DERIVACION IMPLICITA: Para derivar implícitamente basta con derivar cada termino e indicar la derivada de interna de la variable dependiente. Una vez logres la derivada, factoriza si es necesario el término $\frac{dy}{dx}$ y despéjalo, ej.

$$x^2y-xy^2+y^2=7$$

$$2xy+x^2y'-(y^2+2xyy')+2yy'=0$$

$$2xy+x^2y'-y^2-2xyy'+2yy'=0$$

$$x^2y'-2xyy'+2yy'=-2xy+y^2$$

$$y'(x^2-2xy+2y)=y^2-2xy$$

De acuerdo al ejemplo anterior encuentra y' o $\frac{dy}{dx}$ a través de la derivación implícita:

1. $25=x^2+y^2$
   Respuesta: $-\frac{x}{y}$

2. $9x^2=y^3+3x$
   Respuesta: $\frac{18x-3}{3y^2}$

3. $8xy=y^4+3y^4$
   Respuesta: $\frac{8y}{4y^3+12y^3-8x}$

4. $x^2y=4+2x-3y^2-5y^3$
   Respuesta: $\frac{2xy-2}{-6y-15y^2-x^2}$

5. $4x^4=yx^3+\frac{1}{x^2}+3y^2$
   Respuesta: $16x^3-3yx^2+\frac{2}{x^3}$

6. $y^2x+2x=y(x^2-3)^2$
   Respuesta: $\frac{4yx(x^2-3)-y^2-2}{2xy-(x^2-3)^2}$

7. $2=x\sin y+y\cos x$
   Respuesta: $\frac{y\sin x-\sin y}{x\cos y+\cos x}$

8. $\cos y=x+\sin 2y-\sin x$
   Respuesta: $\frac{\cos x-1}{\sin y+2\cos 2y}$

9. $\cot xy=\sqrt{x}+6y$
   Respuesta: $\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}-y\csc^2 xy}{6+x\csc^2 xy}$

10. $\cos(x-y)=xe$
    Respuesta: e

11. $\tan xy=x\sin y+y$
    Respuesta: $\frac{\sin y-y\sec^2 xy}{x\sec^2(xy)-x\cos y-1}$

III METODOS DE INTEGRACION

1. **METODO DE SUSTITUCION**: Se usa cuando, dentro de la integral dada, es posible ver la una función y su derivada. De ser así se cambia la variable x que por u, ej:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

$x = t^2 \qquad t = \sqrt{x}$

$dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = 2\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)\sqrt{x}} = 2\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\text{arc tg } t + C = 2\text{ arc tg}\sqrt{x} + C$$



Resuelve:

1. $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx$
2. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$
3. $\int \frac{x}{\sqrt{5+x^2}}\, dx$
4. $\int x\sqrt{1+x}\, dx$

2. **METODO DE PARTES: Se utiliza cuando se tenga un producto de funciones presente en la integral. Es posible guiarse con la expresión:**

$$\int u \cdot v'\, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx$$

TRUCO

A QUIEN HACER U?

Funciones	Inversas	I
Funciones logarítmicas		L
Funciones Polinómicas (algebraicas)		A

- A QUIEN HACER dv?

Funciones Trigonométricas	T
Funciones Exponenciales	E

Ejemplo:



$$\int \operatorname{sen} x \ln(\cos x)\,dx$$

$u = \ln(\cos x) \xrightarrow{\text{derivar}} u' = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$v' = \operatorname{sen} x \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\cos x$

$$\int \operatorname{sen} x \ln(\cos x)\,dx = -\cos x \ln(\cos x) - \int \operatorname{sen} x\, dx =$$

$$= -\cos x \ln(\cos x) + \cos x + C$$



Resuelve:

1. $\int x \operatorname{sen} x \, dx$
2. $\int x e^{x} \, dx$
3. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

3. **METODO DE SUSTITUCION TRIGONOMETRICA: El método consiste en hacer un cambio de variable. Se pasa de una variable algebraica a una variable trigonométrica.**

La integración por sustitución trigonométrica sirve para integrar funciones que tienen la forma:

$\sqrt{(a^2-u^2)^n}$, $\sqrt{(a^2+u^2)^n}$ y $\sqrt{(u^2-a^2)^n}$

Este método se basa en el uso de triángulos rectángulos, el teorema de Pitágoras e identidades trigonométricas.

Para el método de sustitución trigonométrica se reemplaza el radical haciendo una sustitución adecuada. El resultado es un integrando que contiene funciones trigonométricas. En la siguiente tabla se muestra cuál debe ser la sustitución:

EXPRESIÓN EN EL INTEGRANDO	SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA	TRIÁNGULO UTILIZADO
$\sqrt{a^2+u^2}$	$x = a tag\theta$	x, $\sqrt{a^2+x^2}$, θ, a
$\sqrt{a^2-u^2}$	$x = a sen\theta$	x, a, θ, $\sqrt{a^2-x^2}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a sec\theta$	$\sqrt{x^2-a^2}$, x, θ, a

Ejemplo:

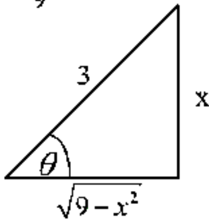
5.-Encontrar: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

Solución.-

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{3^2-x^2}}$, la forma es: $a^2 - x^2$

Luego: $x = 3 sen\,\theta, dx = 3\cos\theta d\theta, \sqrt{3^2-x^2} = 3\cos\theta$, además: $sen\,\theta = \frac{x}{3}$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3^2-x^2}} = \int \frac{3\cos\theta d\theta}{3^2 sen^2\theta\, 3\cos\theta} = \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{9}\int \cos ec^2\theta d\theta = -\frac{1}{9}\cos\tau g\theta + c$$



De la figura se tiene:



Resuelve:

1. $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-16}} = 16\left(\frac{1}{2}\sec t\,\tau g t + \frac{1}{2}\ell\eta\left|\sec t + \tau g t\right| + c\right) = 8\sec t\,\tau g t + 8\ell\eta\left|\sec t + \tau g t\right| + c$$

2. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc}\sec x + c$$

3. $$:\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9}{2}\left(\operatorname{arcs}en\,\frac{x}{3} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{9}\right) + c$$

MILENA ALVAREZ GARCIA
DOCENTE DE FISICA Y MATEMATICAS